

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática A - 12º ANO

Código 635 - 1ª Fase - 2016 - 23 de junho de 2016

Grupo I

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	B	D	D	A	C	B
Versão 2	D	C	D	B	C	D	A	A

Grupo II

1.

$$\rho = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{tg} \alpha = -\sqrt{3} \text{ e } \alpha \in 2^\circ Q \text{ pelo que } -1 + \sqrt{3}i = 2\text{cis}\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$z_1 = \frac{8\text{cis}\theta}{2\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 4\text{cis}\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overline{z_1} = 4\text{cis}\left(-\theta + 2\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overline{z_1} \times z_2 = 4\text{cis}\left(-\theta + 2\frac{\pi}{3}\right) \times \text{cis}(2\theta) = 4\text{cis}\left(-\theta + 2\frac{\pi}{3} + 2\theta\right) = 4\text{cis}\left(\theta + 2\frac{\pi}{3}\right)$$

Para que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real então $\theta + 2\frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 1$ então $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$

Resposta: $\theta = \frac{\pi}{3}$

2.1

$$x_i \in \{1, 2, 4, 8\}$$

x_i	1	2	4	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

$$P(X = 1) = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 2) = \frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^9C_2} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

$$P(X = 4) = \frac{{}^4C_2 + {}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \frac{6+4}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(X = 8) = \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

2.2

$${}^8C_3 \times {}^5C_4 = 56 \times 5 = 280$$

3.1

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$$

3.2

$$M_{[AC]} = (-2, 2, 1), \text{ pelo que } V(-2, 2, z)$$

$$\text{Como } V \text{ pertence ao plano } BCV, 3 \times 2 + z - 10 = 0 \Leftrightarrow z = 4$$

$$V(-2, 2, 4)$$

Resposta: $V(-2, 2, 4)$

3.3

$$\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0) \text{ vetor normal ao plano } \alpha$$

$$\text{Plano } \alpha : \text{ Como passa em } P(1, -2, -1) \text{ então } -2 \times 1 + 2 \times (-2) + D = 0 \Leftrightarrow -6 + D = 0 \Leftrightarrow D = 6$$

$$-2x + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$$

Interseção dos dois planos

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ z = -3y + 10 \end{cases}$$

Então

$$(x, y, z) = (y + 3, y, -3y + 10) = (3, 0, 10) + y(1, 1, -3), y \in \mathfrak{R}$$

$$\text{uma equação vetorial da reta : } (x, y, z) = (3, 0, 10) + k(1, 1, -3), k \in \mathfrak{R}$$

4.1

$$h'(t) = \frac{1}{2\pi}(-\operatorname{sen}(2\pi t) \times 2\pi) + 1\operatorname{sen}(2\pi t) + t \cos(2\pi t) \times 2\pi$$

$$= -\operatorname{sen}(2\pi t) + \operatorname{sen}(2\pi t) + 2\pi t \cos(2\pi t)$$

$$= 2\pi t \cos(2\pi t)$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 2\pi t \cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow 2\pi t = 0 \vee \cos(2\pi t) = 0$$




$$\Leftrightarrow t = 0 \vee 2\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Para

$$k = 0, t = 0 \vee t = \frac{1}{4}$$

$$k = 1, t = 0 \vee t = \frac{3}{4}$$

	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
$2\pi t$	0	+	$\frac{\pi}{2}$	+	$\frac{3\pi}{2}$	+	2π
$\cos(2\pi t)$	1	+	0	-	0	+	1
$h'(t)$	0	+	0	-	0	+	2π
Monotonía de h	$20 + \frac{1}{2\pi}$ mín		$20 + \frac{1}{4}$ Máx		$20 - \frac{3}{4}$ mín		$20 + \frac{1}{2\pi}$ Máx

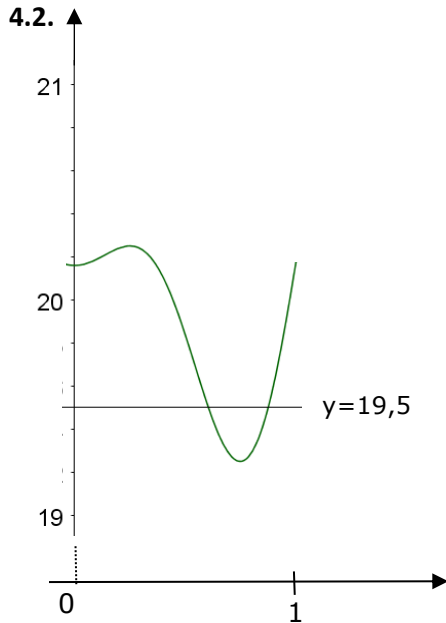
$$h(0) = 20 + \frac{1}{4}; \quad h\left(\frac{1}{4}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 0 + \frac{1}{4} = 20 + \frac{1}{4}; \quad h\left(\frac{3}{4}\right) = 20 + 0 - \frac{3}{4} \times 1 = 20 - \frac{3}{4}$$

$$h(1) = 20 + \frac{1}{2\pi}$$

logo

$$M = 20 + \frac{1}{4} \quad e \quad m = 20 - \frac{3}{4}$$

$$A = 20 + \frac{1}{4} - 20 + \frac{3}{4} = 1$$



- $a \approx 0,606$ e $b \approx 0,877$
- $b - a \approx 0,27$
- No contexto do problema

Durante 0,27 minutos a distância do ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale foi inferior a 19,5 metros.

5.1.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = f'(-1) = e^{-1}((-1)^2 - 1 + 1) = \frac{1}{e} = p$$

$$q = -\frac{1}{p} = -e$$

O valor de q corresponde ao declive da reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f em $x = -1$.

5.2.

$$f''(x) = (e^x(x^2 + x + 1))' = e^x \cdot (x^2 + x + 1) + e^x \cdot (2x + 1) = e^x \cdot (x^2 + 3x + 2)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
Gráfico de f	U	PI	\cap	PI	U

A concavidade do gráfico está voltada para cima nos intervalos $]-\infty, -2[$ e em $]-1, +\infty[$

A concavidade do gráfico está voltada para baixo em $]-2, -1[$

As abscissas dos pontos de inflexão são, respetivamente $x = -2$ e $x = -1$

6.1.

Atendendo a que a função é contínua no domínio, então só poderá existir assíntota vertical em $x = -1$ ou $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln \frac{-2}{0^-} = +\infty \text{ logo } x = -1 \text{ é assíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln \frac{0^+}{2} = -\infty \text{ logo } x = 1 \text{ é assíntota vertical}$$

6.2.

Esta questão pode ser resolvida por vários processos, sendo um deles o seguinte:

A função f é ímpar pois se $x \in D_f$ então $-x \in D_f$ e

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x)$$

A reta secante passa nos pontos de coordenadas $(a, f(a))$ e $(-a, f(-a))$ mas $f(-a) = -f(a)$ logo

passa em $(a, f(a))$ e $(-a, -f(a))$ pelo que o declive é igual a $\frac{-2f(a)}{-2a} = \frac{f(a)}{a}$

Então a reta secante terá por equação $y - f(a) = \frac{f(a)}{a}(x - a) \Leftrightarrow y = \frac{f(a)}{a}x$ e o ponto $(x, y) = (0, 0)$ verifica esta equação.