GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2013

VERSÃO 1

Página em branco

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova (Versão 1 ou Versão 2). A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 5, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Na Figura 1, está representado um tabuleiro quadrado dividido em dezasseis quadrados iguais, cujas linhas são A, B, C e D e cujas colunas são 1, 2, 3 e 4. O João tem doze discos, nove brancos e três pretos, só distinguíveis pela cor, que pretende colocar no tabuleiro, não mais do que um em cada quadrado.

	1	2	3	4
A				
B				
C				
D				

Figura 1

De quantas maneiras diferentes pode o João colocar os doze discos nos dezasseis quadrados do tabuleiro?

(A) ${}^{16}C_{12}$ **(B)** ${}^{16}C_9 \times {}^{7}C_3$ **(C)** ${}^{16}A_{12}$ **(D)** ${}^{16}A_9 \times {}^{7}A_3$

2. Considere a linha do triângulo de Pascal em que o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento é 484.

Qual é a probabilidade de escolher, ao acaso, um elemento dessa linha que seja superior a 1000?

(A) $\frac{15}{23}$ **(B)** $\frac{6}{11}$ **(C)** $\frac{17}{23}$ **(D)** $\frac{8}{11}$

3. Sejam a e b dois números reais tais que $1 < a < b$ e $\log_a b = 3$

Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a\left(a^5 \times \sqrt[3]{b}\right) + a^{\log_a b}$?

(A) $6 + b$ **(B)** $8 + b$ **(C)** $6 + a^b$ **(D)** $8 + a^b$

4. Seja f uma função de domínio $[-e, 1]$

Sabe-se que:

- f é contínua no seu domínio;
- $f(-e) = 1$
- $f(1) = e$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A equação $f(x) - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-e, 1[$

(B) A equação $f(x) = e$ tem pelo menos uma solução em $]-e, 1[$

(C) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-e, 1[$

(D) A equação $f(x) = \frac{e}{2}$ tem pelo menos uma solução em $]-e, 1[$

5. Sejam f' e f'', de domínio $\mathbb{R}$, a primeira derivada e a segunda derivada de uma função f, respetivamente.

Sabe-se que:

- a é um número real;
- P é o ponto do gráfico de f de abcissa a
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$
- $f''(a) = -2$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) a é um zero da função f

(B) $f(a)$ é um máximo relativo da função f

(C) $f(a)$ é um mínimo relativo da função f

(D) P é ponto de inflexão do gráfico da função f

6. Na Figura 2, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial g, de grau 3

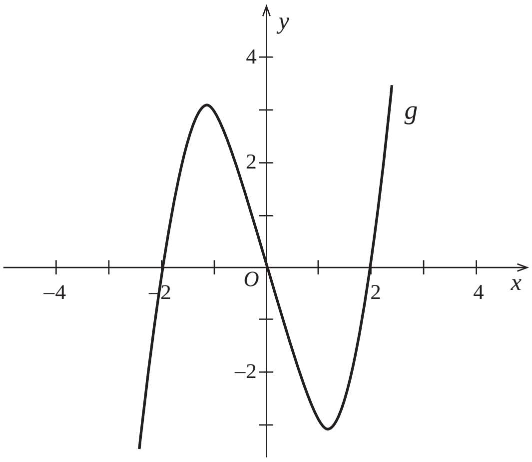
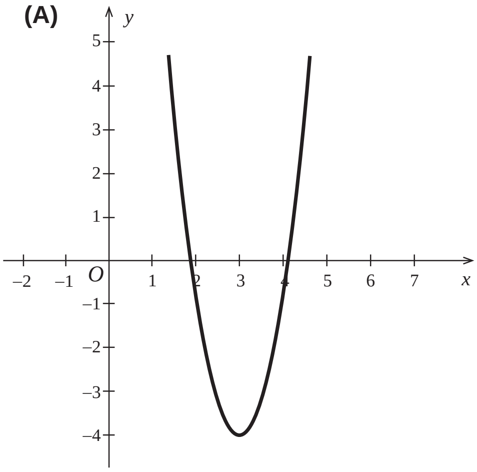


Figura 2

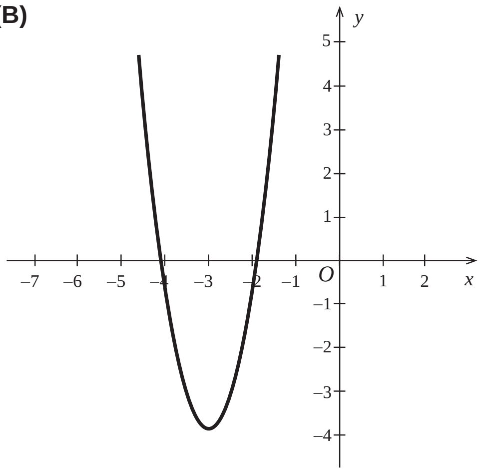
Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, que verifica a condição $f(x) = g(x-3)$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f', primeira derivada da função f ?

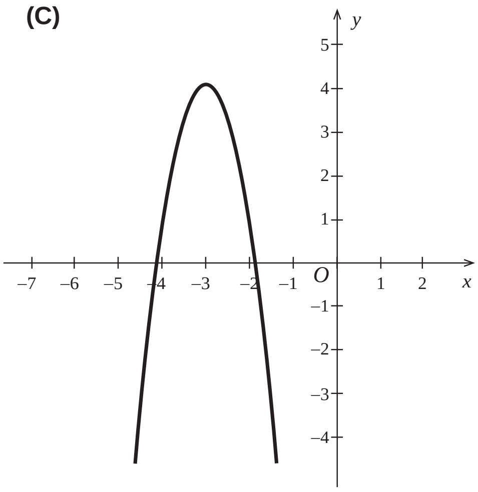
(A)



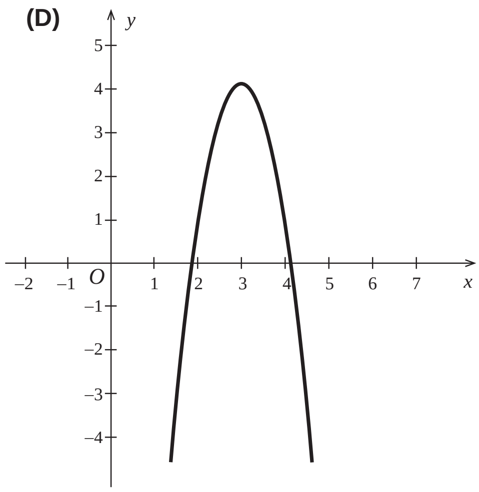
(B)



(C)



(D)



7. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z = 2 + bi$, com $b < 0$

Seja $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual dos números complexos seguintes pode ser o conjugado de z ?

(A) $\frac{3}{2} cis(\alpha)$

(B) $3cis(-\alpha)$

(C) $3cis(\alpha)$

(D) $\frac{3}{2} cis(-\alpha)$

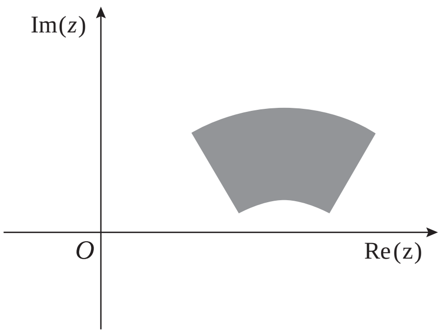
8. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{3}{2} \leq |z - 3 + i| \leq 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{3} \leq \arg(z - 3 + i) \leq \frac{2\pi}{3}$$

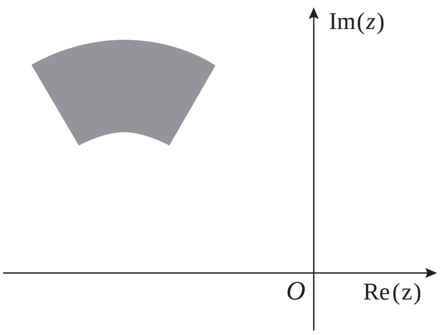
Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$

Qual das opções seguintes pode representar, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição dada?

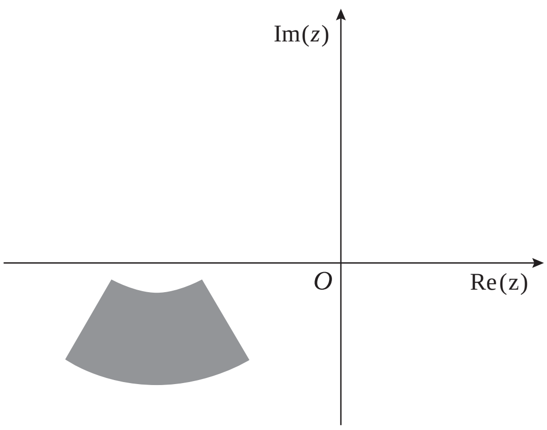
(A)



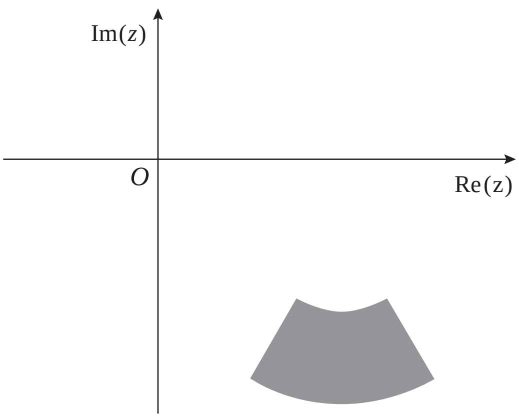
(B)



(C)



(D)



GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

1.1. Considere $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2} + i^{22}$ e $z_2 = \dfrac{-2}{i\,z_1}$

Determine, sem utilizar a calculadora, o menor número natural n tal que $(z_2)^n$ é um número real negativo.

1.2. Seja $\alpha \in [-\pi, \pi[$

Mostre que $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)+i\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha} = cis(\pi - 2\alpha)$

2. Na Figura 3, está representado um dado cúbico, não equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 3, em que faces opostas têm o mesmo número.

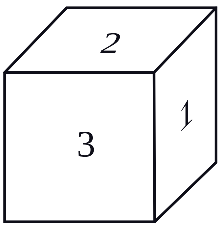


Figura 3

Lança-se o dado uma única vez e observa-se o número da face voltada para cima.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

A: «sair número ímpar»

B: «sair número menor do que 3»

Sabe-se que:

- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cap B) = \dfrac{5}{9}$
- $P(B \mid A) = \dfrac{2}{7}$

Determine a probabilidade de sair o número 3

3. Numa conferência de imprensa, estiveram presentes 20 jornalistas.

3.1. Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos 20 jornalistas presentes nessa conferência de imprensa.

Seja X a variável aleatória «número de jornalistas do sexo feminino escolhidos».

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é a seguinte.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Considere agora a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, dois dos 20 jornalistas presentes nessa conferência de imprensa.

Seja Y a variável aleatória «número de jornalistas do sexo feminino escolhidos».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável Y

Apresente as probabilidades na forma de fração.

3.2. Considere o problema seguinte.

«Admita que a conferência de imprensa se realiza numa sala, cujas cadeiras se encontram dispostas em cinco filas, cada uma com oito cadeiras. Todos os jornalistas se sentam, não mais do que um em cada cadeira, nas três primeiras filas.

De quantas maneiras diferentes se podem sentar os 20 jornalistas, sabendo que as duas primeiras filas devem ficar totalmente ocupadas?»

Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.

Resposta I) ${}^{20}C_{16} \times 16! \times {}^{8}A_4$ Resposta II) ${}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^{8}A_4$

Numa composição, apresente os raciocínios que conduzem a cada uma dessas respostas.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{3+x} + 2x & \text{se } \; x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{1 - \sqrt{x} + \operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se } \; x > 1 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 1$

4.2. Mostre que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $-\infty$

5. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g', de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por

$$g'(x) = \ln\left(e^x + 6e^{-x} + 4x\right)$$

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

6. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $[-1, 2]$, definida por $f(x) = -x - 3^{1 + \ln(x^2+1)}$, o ponto A de coordenadas $(2, 0)$ e um ponto P que se desloca ao longo do gráfico da função f

Existe uma posição do ponto P para a qual a área do triângulo $[AOP]$ é mínima.

Determine a área desse triângulo, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar o valor da área do triângulo $[AOP]$ com arredondamento às centésimas.

7. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, o triângulo $[OAB]$ e a reta r

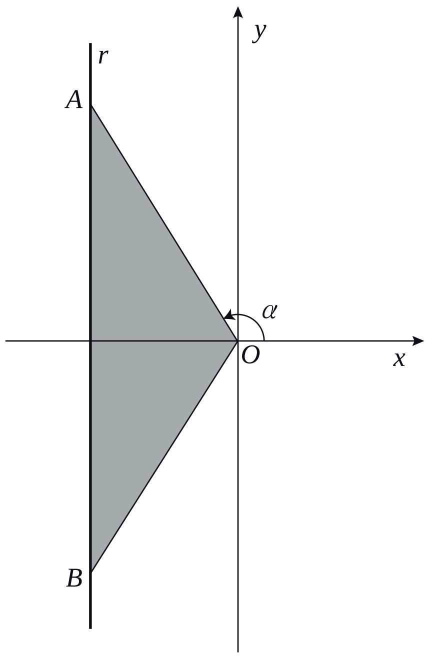


Figura 4

Sabe-se que:

- a reta r é definida por $x = -3$
- o ponto A pertence à reta r e tem ordenada positiva;
- o ponto B é o simétrico do ponto A em relação ao eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$
- a função P, de domínio $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, é definida por $P(x) = -6\,tg\,x - \frac{6}{\cos x}$

7.1. Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por $P(\alpha)$

7.2. Determine o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$, sem utilizar a calculadora.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.**	(8 × 5 pontos)	40 pontos
		40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	15 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	15 pontos
4.	
4.1.	15 pontos
4.2.	15 pontos
5.	15 pontos
6.	15 pontos
7.	
7.1.	15 pontos
7.2.	10 pontos
	160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**